III : Analyse vectorielle

Exercice 1 Montrer les relations suivantes. On pourra utiliser la notation en composantes et la convention de sommation d'Einstein, ainsi que l'identité

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\,.$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0\\
&(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\big[(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\big] = \big[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\big]^2\\
&(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})
\end{aligned}$$

Exercice 2 Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux vecteurs linéairement indépendants dans l'espace euclidien à trois dimensions.

1) Montrer que tout vecteur $\mathbf{x}$ peut s'écrire sous la forme $\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{a} + \mu\,\mathbf{b} + \nu\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.
2) a) Étudier les solutions de l'équation $\mathbf{a}\times\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
   b) On pose $\mathbf{a} = (2,0,1)$, $\mathbf{b} = (1,3,-2)$ et $\mathbf{c} = (1,1,-2)$, les coordonnées des vecteurs étant données dans une base orthonormée directe. Quel est le lieu des extrêmités des vecteurs $\mathbf{x}$ solutions de $\mathbf{a}\times\mathbf{x} = \mathbf{b}$? Quel est l'ensemble des solutions de $\mathbf{b}\times\mathbf{x} = \mathbf{c}$? Quelle est la solution de norme minimale de $\mathbf{a}\times\mathbf{x} = \mathbf{c}$?
3) Étudier les solutions de l'équation $\mathbf{a}\times\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{b}$.
4) Étudier les solutions de l'équation $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{x}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{x}$.

Exercice 3 Montrer les relations suivantes, en utilisant la notation en composante et la convention de sommation d'Einstein :

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}(fg) &= f\,\mathbf{grad}\,g + g\,\mathbf{grad}\,f\\
\mathrm{div}(f\mathbf{a}) &= f\,\mathrm{div}\,\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{grad}\,f\\
\mathrm{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{b}\\
\mathbf{rot}(f\mathbf{a}) &= f\,\mathbf{rot}\,\mathbf{a} + \mathbf{grad}\,f\times\mathbf{a}\\
\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{a} &= \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a} - \Delta\,\mathbf{a}\\
\mathbf{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) &= (\mathbf{b}\cdot\mathbf{grad})(\mathbf{a}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{grad})(\mathbf{b}) + \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 4 Exprimer $\operatorname{div}\mathbf{a}$ en coordonnées sphériques ; exprimer $\mathbf{rot}\,\mathbf{a}$ en coordonnées sphériques. On pourra utiliser les versions infinitésimales appropriées de la formule de Stokes. On pourra également effectuer le calcul en partant des formules explicites en coordonnées cartésiennes et en effectuant explicitement les changements de variables (ce calcul est lourd, mais il faut l'avoir fait une fois dans sa vie...).

Exercice 5 Montrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \mathbf{grad}\, f \,\mathrm{d}V = \oiint_{\partial V} f\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \\
&\iiint_V \mathbf{rot}\,\mathbf{a}\,\mathrm{d}V = \oiint_{\partial V} \mathbf{n}\times\mathbf{a}\,\mathrm{d}S \\
&\iint_\Sigma \mathbf{n}\times\mathbf{grad}\, f\,\mathrm{d}S = \oint_{\partial\Sigma} f\,\mathrm{d}\mathbf{M} \\
&\iint_\Sigma \big(n_i\,\mathbf{grad}\,a_i - \mathbf{n}\operatorname{div}\mathbf{a}\big)\,\mathrm{d}S = \oint_{\partial\Sigma} \mathrm{d}\mathbf{M}\times\mathbf{a}\,.
\end{aligned}$$

Exercice 6 On montre (voir la suite du cours) que le champ des vitesses d'un solide en rotation autour d'un point fixe O est donné par $\mathbf{v}(M) = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{OM}$. Le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ est le "vecteur rotation" du solide à un instant donné.

1) Dessiner l'allure des lignes de champ (une ligne de champ est une courbe telle que la tangente est parallèle au champ en tout point de la courbe).
2) Calculer $\operatorname{div}\mathbf{v}$ et $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$ en utilisant les composantes des vecteurs puis en utilisant les formules pertinentes démontrées à l'exercice 1.
3) Calculer $\Delta\,\mathbf{v}$.

Exercice 7 On considère les champs de vecteurs suivants, exprimés soit en coordonnées cartésiennes, soit en coordonnées cylindriques,

$$\mathbf{a} = -kx\,\mathbf{u}_x + ky\,\mathbf{u}_y\,,\quad \mathbf{b} = \frac{C}{2\pi\rho}\,\mathbf{u}_\theta\,,\quad \mathbf{c} = \frac{C}{2\pi\rho}\,\mathbf{u}_\rho\,.$$

1) Précisez les domaines de définition des champs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$.
2) Tracer les lignes de champs pour $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$, c'est-à-dire les courbes qui sont tangentes aux champs en tout point.
3) Calculer la divergence et le rotationnel de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$.

4) Montrer que $\mathbf{a}$ est à circulation conservative et à flux conservatif. Calculer les potentiels scalaire et vecteur associés.

5) Soient P et Q deux points de l'espace. Soient γ et γ' deux chemins orientés joignant les points P et Q. On dit que γ et γ' sont *homotopes relativement à P et Q* si γ' peut être obtenu en déformant continument γ tout en maintenant les extrémités P et Q fixes.

   a) Montrer que $\int_\gamma \mathbf{b} \cdot \mathrm{d}\mathbf{M} = \int_{\gamma'} \mathbf{b} \cdot \mathrm{d}\mathbf{M}$ si γ et γ' sont homotopes.

   b) Montrer que $\mathbf{b}$ n'est pas à circulation conservative. Est-ce en contradiction avec la valeur de $\mathbf{rot}\,\mathbf{b}$?

   c) Essayer d'obtenir un potentiel scalaire ϕ pour $\mathbf{b}$. Montrer que le "potentiel" obtenu est singulier (dans un sens que l'on précisera) dans le domaine de définition de $\mathbf{b}$. Rediscuter les questions 5a) et 5b) à la lumière de ce résultat. On calculera en particulier la circulation de $\mathbf{b}$ le long d'un cercle $\rho = R$ en utilisant le potentiel singulier ϕ.

6) Soit Σ une surface cylindrique d'axe (Oz), de rayon R et de hauteur h.

   a) Choisir une orientation de Σ et indiquer l'orientation correspondante du bord $\partial\Sigma$.

   b) Calculer le flux Φ de $\mathbf{c}$ au travers de Σ orientée.

   c) On considère
$$\mathbf{C} = -\frac{Cz}{2\pi\rho}\,\mathbf{u}_\theta\,, \quad \mathbf{C}' = \frac{C\theta}{2\pi}\,\mathbf{u}_z\,.$$
   Calculer $\mathbf{rot}\,\mathbf{C}$ et $\mathbf{rot}\,\mathbf{C}'$. Expliquer pourquoi $\mathbf{C}$ est un véritable potentiel vecteur pour $\mathbf{c}$, alors que $\mathbf{C}'$ est en fait singulier. Retrouver la valeur de Φ calculée à la question précédente à partir du théorème de Stokes, en utilisant $\mathbf{C}$, puis en utilisant $\mathbf{C}'$.

Exercice 8 Soit O un point fixe de l'espace. On considère le champ de vecteurs
$$\mathbf{a}(M) = \frac{\boldsymbol{OM}}{|\boldsymbol{OM}|^3}\,.$$

1) a) Calculer le flux de $\mathbf{a}$ à travers une sphère de centre O et de rayon R.

   b) Calculer $\operatorname{div}\mathbf{a}$.

   c) Le champ $\mathbf{a}$ est-il à flux conservatif ? Commentaire ?

2) Soit γ un contour orienté fermé ne passant pas par O. On définit l'*angle solide* de γ par rapport à O comme étant le flux de $\mathbf{a}$ à travers n'importe quelle surface Σ ne passant pas par O, s'appuyant sur γ (i.e. telle que $\partial\Sigma = \gamma$) et orientée par lui.

   a) Montrer que si Σ et Σ' sont deux surfaces s'appuyant sur γ et pouvant être déformées continument l'une en l'autre de telle manière qu'aucune surface intermédiaire ne contienne O, alors l'angle solide calculé en utilisant Σ et Σ' est le même.

   b) Montrer que, de manière complètement générale, l'angle solide est défini modulo 4π.

   c) Calculer l'angle solide par rapport à O d'un cercle $\mathscr{C}$ d'axe (Oz), de rayon R, tel que le centre du cercle est à la distance h de O. On fera le calcul de deux manières différentes, l'une utilisant comme surface une portion de la sphère de centre O contenant $\mathscr{C}$, l'autre utilisant comme surface le disque situé dans le plan $z = h$ borné par $\mathscr{C}$.